Prof. Dr. Alfred Toth

Relationale Kompositionen I: Zeichenrelationen

1. Es ist ein eigentümliches Paradox (vgl. Toth 2009a, b), dass die Peircesche Zeichenrelation einerseits als triadische Relation über einer monadischen, einer dyadischen und einer triadischen Relation eingeführt wurde (Bense 1979, S. 53, 67):

$Z = {}^3R({}^1R, {}^2R, {}^3R) = R(M, O, I)$,

dass aber anderseits behauptet wird, man könne diese drei Partialrelationen zu 3×3 kartesischen Produkten multiplizieren, wobei das Ergebnis Dyaden seien (Walther 1979, S. 57), denn dies würde ja bedeuten, dass die Zeichenrelation ebenfalls eine triadische Relation über drei dyadischen Relationen sei.

2. Lassen Sie mich zur Veranschaulichung dessen, worum es in dieser und meinen nächsten Arbeiten geht, ein sprachliches Beispiel anführen. Jedes Prädikat ist logisch gesehen eine n-stellige Relation, wobein das n von der dem Prädikat immanenten Valenzzahl abhängt:

Beispiel für Valenzzahl = 1 (${}^1R$): {_ schläft} →
HANS schläft.

Beispiel für Valenzzahl = 2 (${}^2R$): {_ schlägt _} →
HANS schlägt FRITZ.

Beispiel für Valenzzahl = 3 (${}^3R$): {_ schenkt _ _} →
HANS schenkt FRITZ EIN BUCH

Von ganz wenigen Fällen (z.B. dem ${}^3R$-Prädikat „schreiben", einem sog. indirekt transitiven Verb, abgesehen) ist es nun so, dass 1) alle Valenzsstellen ausgefüllt sein müssen, damit ein korrekter Satz entsteht, und dass 2) nicht mehr Valenzsstellen geschaffen werden können. Die folgenden Sätze sind wegen Verletzung von Regel (1) und/oder (2) ungrammatisch:

1. *Hans schläft Fritz. (2)
2. *Hans schläft Fritz ein Buch. (2)

3. *Hans schlägt. (1)
4. *Hans schlägt Fritz ein Buch. (2)

5. *Hans schenkt. (1)
6. *Hans schenkt ein Buch. (1)
7. *Hans schenkt Fritz Hans ein Buch. (2)
8. *Hans schenkt Fritz ein Buch ein Auto. (2)

3. Ist also bei n-stelligen Prädikaten die Anzahl der Argumente $<n$ oder $>n$, ist der Ausdruck falsch. Damit kehren wir zu

$Z = {}^3R({}^1R, {}^2R, {}^3R) = R(M, O, I)$.

Die kleine semiotische Matrix, die sich nicht bei Peirce findet, wurde von Bense und Walther anfangs der 70er Jahre eingeführt (vgl. Bense/Walther 1973, S. 61 f.). In den folgenden beiden Darstellungen gebe ich links die „funktionale" Matrix Walthers und rechts die korrespondierende relationale Matrix mit den Valenzzahlen

	M	O	I
M	MM	MO	MI
O	OM	OO	OI
I	IM	IO	II

	^1R	^2R	^3R
^1R	$^1R^1R$	$^1R^2R$	$^1R\,^3R$
^2R	$^2R^1R$	$^2R^2R$	$^2R^3R$
^3R	$^3R^1R$	$^3R^2R$	$^3R^3R$

Wenn man sich nun aber fragt, welche der drei Relationen (^1R, ^2R, ^3R) sich aufgrund ihrer Valenzzahl verbinden können, erhält man die folgenden Möglichkeiten:

^1R: ^1R
^2R: $^1R^1R$, ^2R
^3R: $^1R^1R^1R$, $^1R^2R$, $^2R^1R$, ^3R

Diese nehmen aber in der relationalen Matrix nur gerade ein linkes oberes Dreieck von Einträgen ein:

	^{1}R	^{2}R	^{3}R
^{1}R	$\boxed{^{1}R^{1}R}$	$\boxed{^{1}R^{2}R}$	$^{1}R\,^{3}R$
^{2}R	$\boxed{^{2}R^{1}R}$	$^{2}R^{2}R$	$^{2}R^{3}R$
^{3}R	$^{3}R^{1}R$	$^{3}R^{2}R$	$^{3}R^{3}R$

Es ist also nicht so sehr die Frage, ob in den folgenden beiden Fällen

$^{m}R^{n}R$ mit $m > n$ sowie $n > m$

immer alle Valenzzahlen 1, 2 und 3 für m und n eingesetzt werden können, denn bei den Ausdrücken der Form $^{m}R^{n}R$ handelt es sich ja nicht um Prädikat-Argument- oder Argument-Prädikat-Strukturen, sondern um komponierte Prädikate. D.h., die Menge der relationalen Subzeichen, die über

$Z = {}^{3}R({}^{1}R, {}^{2}R, {}^{3}R) = R(M, O, I)$

möglich sind, ist nur gerade

$Z = \{{}^{1}R, {}^{2}R, {}^{3}R, ({}^{1}R^{1}R), ({}^{1}R^{2}R), ({}^{2}R^{1}R), ({}^{1}R^{1}R^{1}R)\} = \{M, O, I, (MM), (MO), (OM), (MMM)\}$

4. Nun beträgt aber die höchste Valenzzahl = 6, nämlich diejenige von $({}^{3}R^{3}R)$ = (II). Da man mit einer triadischen Semiotik maximal Valenzzahlen von 3 erreichen kann, brauchen wir also eine hexadische Semiotik, damit wir als ihre Teilmatrix die vollständige triadisch-trichotomische Matrix erhalten:

	${}^{1}R$	${}^{2}R$	${}^{3}R$	${}^{4}R$	${}^{5}R$	${}^{6}R$
${}^{1}R$	$\boxed{{}^{1}R^{1}R}$	$\boxed{{}^{1}R^{2}R}$	$\boxed{{}^{1}R^{3}R}$	${}^{1}R^{4}R$	${}^{1}R^{5}R$	${}^{1}R^{6}R$
${}^{2}R$	$\boxed{{}^{2}R^{1}R}$	$\boxed{{}^{2}R^{2}R}$	$\boxed{{}^{2}R^{3}R}$	${}^{2}R^{4}R$	${}^{2}R^{5}R$	${}^{2}R^{6}R$
${}^{3}R$	$\boxed{{}^{3}R^{1}R}$	$\boxed{{}^{3}R^{2}R}$	$\boxed{{}^{3}R^{3}R}$	${}^{3}R^{4}R$	${}^{3}R^{5}R$	${}^{3}R^{6}R$
${}^{4}R$	${}^{4}R^{1}R$	${}^{4}R^{2}R$	${}^{4}R^{3}R$	${}^{4}R^{4}R$	${}^{4}R^{5}R$	${}^{4}R^{6}R$
${}^{5}R$	${}^{5}R^{1}R$	${}^{5}R^{2}R$	${}^{5}R^{3}R$	${}^{5}R^{4}R$	${}^{5}R^{5}R$	${}^{5}R^{6}R$
${}^{6}R$	${}^{6}R^{1}R$	${}^{6}R^{2}R$	${}^{6}R^{3}R$	${}^{6}R^{4}R$	${}^{6}R^{5}R$	${}^{6}R^{6}R$

Die triadische Matrix mit VZ = [1, 6] ist also eine Submatrix, und zwar ein Block und keine Triangulation der hexadischen Matrix mit VZ = [1, 12]. Wichtig an dieser Feststellung ist, dass wir erst jetzt, da wir alle sogenannten Subzeichen haben, die bisher bedenkenlos als kartesische Produkte der triadischen Peirceschen Matrix verwendet wurden, an die Konstruktion von Zeichenklassen gehen können. Damit können wir nun auch eine präzise relationale Definition von Zeichenklasse geben: Eine Zeichenklasse ist eine relationale Struktur der Form

$$\text{Zkl} = {}^{3}R({}^{3}R^{l}S, {}^{2}R^{m}S, {}^{1}R^{n}S),$$

worin $l \leq m \leq n$ gilt. Nun ist aber

$$({}^{3}R, {}^{2}R, {}^{1}R)^{\circ} = ({}^{1}R, {}^{2}R, {}^{3}R),$$

d.h. wir haben

$$({}^{1}R\ {}^{2}R\ {}^{3}R) = ({}^{n}S\ {}^{m}S\ {}^{l}S),$$

denn es ist ja

$$({}^{3}R^{l}S, {}^{2}R^{m}S, {}^{1}R^{n}S)^{\circ} = ({}^{n}S^{1}R, {}^{m}S^{2}R, {}^{l}S^{3}R).$$

Praktisch bedeutet dass, dass die Stellenwertrelationen einer Zkl nichts anderes als die Konverse der Hauptwertrelationen der Konverse einer Zkl sind.

Wenn also Zkl = $^{3}R(^{3}R^{l}S, {}^{2}R^{m}S, {}^{1}R^{n}S)$ mit $l \leq m \leq n$ gilt, dann repetieren also die Sellenwerte von Zkl bzw. die Hauptwerte von (Zkl)° die Definition des Zeichens, die wir am Anfang dieser Arbeit gegeben hatten, d.h. $Z = {}^{3}R({}^{1}R, {}^{2}R, {}^{3}R)$. Damit ist also gerechtfertigt, dass man nicht $3^3 = 27$, sondern nur 10 Zeichenklassen erhält, die wir nun wie folgt notieren können:

$$
\begin{array}{llllllllll}
({}^{3}R^{1}S, & {}^{2}R^{1}S, & {}^{1}R^{1}S) & \quad ({}^{3}R^{1}S, & {}^{2}R^{1}S, & {}^{1}R^{1}S)^{\circ} & = & ({}^{1}S^{1}R, & {}^{1}S^{2}R, & {}^{1}S^{3}R) \\
({}^{3}R^{1}S, & {}^{2}R^{1}S, & {}^{1}R^{2}S) & \quad ({}^{3}R^{1}S, & {}^{2}R^{1}S, & {}^{1}R^{2}S)^{\circ} & = & ({}^{2}S^{1}R, & {}^{1}S^{2}R, & {}^{1}S^{3}R) \\
({}^{3}R^{1}S, & {}^{2}R^{1}S, & {}^{1}R^{3}S) & \quad ({}^{3}R^{1}S, & {}^{2}R^{1}S, & {}^{1}R^{3}S)^{\circ} & = & ({}^{3}S^{1}R, & {}^{1}S^{2}R, & {}^{1}S^{3}R) \\
({}^{3}R^{1}S, & {}^{2}R^{1}S, & {}^{1}R^{3}S) & \quad ({}^{3}R^{1}S, & {}^{2}R^{1}S, & {}^{1}R^{3}S)^{\circ} & = & ({}^{3}S^{1}R, & {}^{1}S^{2}R, & {}^{1}S^{3}R) \\
({}^{3}R^{1}S, & {}^{2}R^{1}S, & {}^{1}R^{3}S) & \quad ({}^{3}R^{1}S, & {}^{2}R^{1}S, & {}^{1}R^{3}S)^{\circ} & = & ({}^{3}S^{1}R, & {}^{1}S^{2}R, & {}^{1}S^{3}R) \\
({}^{3}R^{1}S, & {}^{2}R^{1}S, & {}^{1}R^{3}S) & \quad ({}^{3}R^{1}S, & {}^{2}R^{1}S, & {}^{1}R^{3}S)^{\circ} & = & ({}^{3}S^{1}R, & {}^{1}S^{2}R, & {}^{1}S^{3}R) \\
({}^{3}R^{2}S, & {}^{2}R^{2}S, & {}^{1}R^{2}S) & \quad ({}^{3}R^{2}S, & {}^{2}R^{2}S, & {}^{1}R^{2}S)^{\circ} & = & ({}^{2}S^{1}R, & {}^{2}S^{2}R, & {}^{2}S^{3}R) \\
({}^{3}R^{2}S, & {}^{2}R^{2}S, & {}^{1}R^{3}S) & \quad ({}^{3}R^{2}S, & {}^{2}R^{2}S, & {}^{1}R^{3}S)^{\circ} & = & ({}^{3}S^{1}R, & {}^{2}S^{2}R, & {}^{2}S^{3}R) \\
({}^{3}R^{2}S, & {}^{2}R^{3}S, & {}^{1}R^{3}S) & \quad ({}^{3}R^{2}S, & {}^{2}R^{3}S, & {}^{1}R^{3}S)^{\circ} & = & ({}^{3}S^{1}R, & {}^{3}S^{2}R, & {}^{2}S^{3}R) \\
({}^{3}R^{3}S, & {}^{2}R^{3}S, & {}^{1}R^{3}S) & \quad ({}^{3}R^{3}S, & {}^{2}R^{3}S, & {}^{1}R^{3}S)^{\circ} & = & ({}^{3}S^{1}R, & {}^{3}S^{2}R, & {}^{3}S^{1}R)
\end{array}
$$

Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max/Walther, Elisabeth, Wörterbuch der Semiotik. Köln 1973

Toth, Alfred, Das grosse semiotische Paradox. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Das%20grosse%20sem.%20Paradox.pdf (2009a)

Toth, Alfred, Das grosse semiotische Paradox II. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Das%20grosse%20sem.%20Paradox%20II.pdf (2009b)

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

7.10.2009